Manfred Kronfellner, Technische Universität Wien

LEHRPLANGERECHTES ÜBEN

"Im Schulbuch sind viel zu wenig Übungsaufgaben enthalten!"

Diese Klage ist in den Rückmeldungen, die ich als Schulbuchautor von Lehrern erhalte, am häufigsten zu finden, sogar zur erweiterten Neuauflage von KRONFELLNER-PESCHEK [1989], in der in den ersten beiden Kapiteln etwa 1000(!) Aufgaben enthalten sind. Dies entspricht - je nach Lehrstoffverteilung - einem Wochenpensum von 70 bis 100 Aufgaben pro Woche. Es kann also nicht die Gesamtzahl der Aufgaben zu gering sein, sondern höchstens die Anzahl von Aufgaben einer ganz bestimmten Art. Diese werden in anderen Rückmeldungen auch konkret gefordert: mehr (und kompliziertere) Bruchgleichungen, Polynomdivisionen, u. ä.

Wozu (komplizierte) Bruchgleichungen?

Natürlich soll jeder Schüler mit *einfachen* Brüchen und *einfachen* Bruchgleichungen umgehen können. Er sollte die entsprechenden Regeln beherrschen und sie verständig und bewußt anwenden können. Dieses Ziel erreicht man aber, indem man *einfache* Bruchgleichungen aufgibt und neben der Rechnung des öfteren die verwendeten Regeln explizit angeben läßt. Wenn man hingegen komplizierte Bruchgleichungen stellt, so wird der Schüler früher oder später das Gehirn ausschalten und die Aufgaben nach unreflektierten Schemata abarbeiten. Dasselbe tritt auch ein, wenn man zwar einfachere, aber zu viele gleichartige Aufgaben unmittelbar hintereinander stellt.

Wozu Polynomdivisionen?

Für viele Schüler stellen sie ein undurchschaubares Kochrezept dar, bei dem bestenfalls die Analogie zum (ebenfalls für viele undurchschaubaren) Divisionsalgorithmus für konkrete Zahlen erkannt wird. Das Argument, man brauche später die Polynomdivision, stimmt insofern nicht, als in allen schulrelevanten Fällen andere, für den Schüler leicht durchschaubare Verfahren verwendet werden können. (Vgl. später!)

Es wäre natürlich ein erstrebenswertes Ziel, den Algorithmus für Schüler durchschaubar zu machen und die Analogie zu thematisieren. Dieses Ziel erreicht man aber, wenn man an *einem* Beispiel den Algorithmus erklärt und begründet und diese Begründungen - evtl. an demselben Beispiel - den Schülern wieder abverlangt; man erreicht dieses Ziel aber sicher nicht, indem man die Schüler 20 (oder mehr) Polynomdivisionen ausführen läßt.

Obwohl häufig die Überfrachtung der Lehrpläne und die Zeitknappheit im Unterrricht beklagt werden, werden also Aufgaben gefordert, die nicht vorgeschrieben sind und letztlich auch nirgends benötigt werden.

Warum besteht ein so starkes Verlangen nach nach Kalkülaufgaben?

Der Wunsch nach noch mehr Aufgaben, insb. Aufgaben der genannten Art, ist ein Symptom einer weit verbreiteten Unterrichtsideologie, derzufolge Mathematikunterricht fast ausschließlich aus Aufgaben besteht, die überwiegend auf einem kochrezeptartigen Niveau abgearbeitet werden.

Der Hauptgrund für dieses Erscheinungsbild des Mathematikunterrichts ist seine bis ins 19. Jahrhundert zurückreichende Tradition, die sich u. a. in Lehrbüchern mit dem Untertitel "Methodisch geordnete Aufgabensammlung" manifestiert. Diese auch heute noch bekannten und von manchen sogar als vorbildhaft hingestellten Werke ermöglichen zwar einen Unterricht mit minimalem Vorbereitungsaufwand, ich halte sie aber für eine didaktische Verfehlung ersten Ranges. Durch die "Ordnung" und die entsprechenden Überschriften über den einzelnen Aufgabengruppen nehmen sie den wesentlichsten Problemlöseschritt vorweg, sodaß die Schüler dann nur noch die Ausführung des durch diese Überschriften bestimmten Algorithmus zu leisten haben.

Das Bestreben, den Lehrstoff in Kleinstportionen zu zerteilen, führte in vielen Fällen auch zu einer Trennung von mathematischer Methode und deren (sinnvolle) Anwendungen. Dazu zwei besonders krasse Beispiele: Man glaubte früher, daß man vor (sinnvollen) Anwendungen der Formel

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ein eigenes Kapitel über endliche (arithmetische und) geometrische Folgen und Reihen einschieben muß. In einem solchen Kapitel muß dann geübt werden, und, da man ja die Anwendungen erst später in einem eigenen Kapitel durchnehmen will, müssen hier ad hoc anwendungsferne, sinnlose Aufgaben erfunden werden. (Z. B.: Von einer arithmetischen Reihe kennt man das 3. und das 8. Glied ...) Ähnliches gilt für Abschnitte über Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen, die nicht selten so lange zelebriert werden, bis für sinnvolle Anwendungen (Bevölkerungswachstum, radioaktiver Zerfall u.v.a.) keine Zeit mehr bleibt. (Vorschläge, wie man diese Inhalte auch ohne den Vorspann unsinniger Drillaufgaben unterrichten kann, findet man etwa in BÜRGER et al. [1990], S. 71, 72, 177ff bzw. S. 117ff oder in KRONFELLNER PESCHEK [1990], S. 93 bzw. S. 45ff.)

Es ist - zugegeben - nicht leicht, mit Traditionen zu brechen, selbst dann, wenn für jeden unübersehbar ist, daß sich seit dem 19. Jahrhundert die unterrichtlichen und gesellschaftlichen Rahmenbedingungen verändert haben. Es ist aber dringend notwendig, sich der Veränderungen außerhalb der Schule bewußt zu werden und alles zu versuchen, damit diese Veränderungen dem trägen Apparat Schule nicht uneinholbar davonlaufen. Fortschritt bedeutet insbesondere, Gewohnheiten und Traditionen sich bewußt zu machen und in Frage zu stellen.

Zielorientierter versus inhaltsorientierter Mathematikunterricht

Auch im Zuge früherer Lehrplanreformen wurde versucht, die Aufgabendidaktik und Drillmethodik zu eliminieren bzw. wenigstens zu reduzieren. Doch nicht die neuen Inhalte haben den Mathematikunterricht verändert, sondern die Tradition des Mathematikunterrichts hat die neuen Inhalte in das vorhandene methodische Korsett gezwängt und auf Kalkülniveau heruntertransformiert: nur jene Inhalte, die durch Serien analoger Aufgaben abgedeckt werden konnten, "überlebten" (Urnenaufgaben und Kombinatorik in der Stochastik, der "Gruppenerkennungsdienst" in der Strukturmathematik, u. ä.), die, die sich nicht als Sequenzen von Analogaufgaben darstellen ließen, wurden als nicht unterrichtbar empfunden und und fanden keinen Eingang in den Mathematikunterricht.

Das bloße Austauschen von Inhalten zeigte also keine über das Inhaltliche hinausgehende Wirkung auf den Stil des Mathematikunterrichts. Es gab zwar in früheren Lehrplänen auch allgemeine Bildungsziele, Bildungs- und Lehraufgabe und didaktische Grundsätze, aber es wurden und werden praktisch nur die aufgelisteten Inhalte als verbindlich angesehen.

Der neue Mathematiklehrplan für die AHS (insb. für die Oberstufe) versucht der Dominanz der Inhalte und der Überbetonung kalkülhaften Arbeitens entgegenzuwirken, und zwar:

a) durch ausführliche Angabe von inhaltsübergreifenden Lernzielen des Mathematikunterrichts in der Bildungs- und Lehraufgabe,
b) durch explizite Verknüpfung dieser Ziele mit konkreten Inhalten,
c) durch ausdrückliches Vorschreiben von Themen, die bisher nicht oder selten berücksichtigte Ziele anpeilen,
d) durch ausdrückliche Hinweise auf Komplexitätsreduktionen,
e) durch Streichen (bzw. Nichterwähnen) von sinnlosen, aber bisher weit verbreiteten Aufgabentypen bzw. durch "Degradieren" von peripheren Inhalten zu "Allenfalls-Stoffen".

Im folgenden sollen diese Punkte exemplarisch durch einige Beispiele belegt werden (insbesondere für jene KollegInnen, die nicht an einer AHS unterrichten; sie sind eingeladen zu überlegen, ob diese Ziele nicht auch außerhalb der AHS gültig sind).

ad a) In der Bildungs- und Lehraufgabe steht unter anderem:
Die Schüler sollen ...
- ein Bild der Mathematik gewinnen, das Verfahrens-, Problem-, Anwendungs- und Theorieaspekte ausgewogen repräsentiert,
- mit der Verwendung geeigneter mathematischer Texte ... vertraut werden.
- Einsichten in die Probleme des Anwendens von Mathematik - wie Probleme des Bildens von mathematischen Modellen - gewinnen.
- Argumentieren und exaktes Arbeiten
  Insb.: präzises Beschreiben von ... Begriffen (Definieren), Arbeiten unter bewußter Verwendung von Regeln
- Darstellen und Interpretieren
- Produktives geistiges Arbeiten
  Anwenden bekannter Verfahren in teilweise neuartigen inner- oder außermathematischen Situationen
- Kritisches Denken
  Überprüfung von Vermutungen, Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen, Erkennen der beschränkten Gültigkeit von Aussagen, Erkennen der Unzulänglichkeit von mathematischen Modellen.
- Reflektieren über Mathematik und mathematische Arbeitsweisen:
  Probleme des Definierens, Beweisens, der Exaktheit erkennen,
  Problemlösestrategien bewußt verwenden,
  die Veränderlichkeit mathematischer Begriffe in der historischen und in der persönlichen Entwicklung kennenlernen.

Der Schüler soll befähigt werden
- Informationsquellen sachgerecht zu nutzen,
- selbständig Wissen zu erwerben,
- Einsichten in grundlegende wissenschaftliche Verfahrensweisen und Denkvorstellungen zu gewinnen.

ad b) Im Anschluß an die im Lehrplan angegebenen Themen werden in Klammern auch jene allgemeinen Ziele angeführt, die im Unterricht an dieser Stelle angepeilt werden können und sollen.
Z.B.: Anwenden reeller Funktionen in außermathematischen Situationen (⟶ Anwenden von Mathematik, kritisches Denken, Reflektieren über Mathematik)

Differentialquotient: Definieren des Differentialquotienten ...(⟶ Grundlegende Kenntnisse, Darstellen und Interpretieren, Anwenden von Mathematik)

Differentiationsregeln (⟶ Grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten, Argumentieren)

(Bemerkung: nur wenn "Fertigkeiten" als Ziel angegeben sind, ist Üben im herkömmlichen Sinn intendiert!)

ad c) Im neuen Lehrplan ist etwa verpflichtend vorgeschrieben: Reflektieren über die Differentialrechnung: Erkennen fundamentaler Ideen. Erkennen verschiedener Exaktheitsstufen bei der Behandlung der Differentialrechnung. (⟶ Grundlegende Einsichten, Reflektieren über Mathematik)

(Bemerkung: Natürlich ist auch dieser Lehrplan als Rahmenlehrplan zu verstehen, innerhalb dessen man Schwerpunkte setzen kann und soll. Dies soll aber nicht dazu führen, daß alles Neue "weggewichtet" und der Drill-Rechenunterricht früherer Jahre beibehalten wird.)

ad d) Durch die Formulierung "Lösen von Exponentialgleichungen der Form $a^x=b$ (etwa beim Untersuchen von Wachstumsvorgängen)" soll erreicht werden, daß an stumpfsinnige Exponentialgleichungen der Form $2^{2x-5} \cdot 5^{3-x} = \ldots$ keine Zeit mehr verschwendet wird.

ad e) Z.B.: Allenfalls Wurzelgleichungen: Lösen; dabei Arbeiten mit Gleichungsumformungen, die keine Äquivalenzumformungen sind. ($\longrightarrow$ Exaktes Arbeiten, kritisches Denken)

(Bemerkung: Nicht Fertigkeiten!)

Vorschläge zur Realisierung der Intentionen des neuen Lehrplanes

Im folgenden soll exemplarisch aufgezeigt werden, wie die im Lehrplan vorgesehenen allgemeinen Ziele im Mathematikunterricht angepeilt werden können. Dabei soll - im Interesse einer unmittelbaren Praktikabilität der Vorschläge - von der Istsituation der Schulmathematik ausgegangen werden: es sollen typische Aufgabenstellungen des Mathematikunterrichts durch zusätzliche Fragestellungen (*kursive Schrift*) ergänzt werden, sodaß neben Rechenfertigkeit auch Fähigkeiten angepeilt werden wie Argumentieren, Darstellen, Interpretieren, Verallgemeinern, bewußtes Anwenden von Regeln, kritisches Denken, u.s.w.

Beispiel 1: a) Berechne auf 2 Arten: 15-3+10-6

b) Beschreibe diese beiden Rechenmöglichkeiten durch eine Formel!

($\longrightarrow$ Verallgemeinern, Darstellen)

Beispiel 2: a) Der Nettopreis einer Ware beträgt S 4500,-. Berechne den Preis inkl. Mehrwertsteuer!

b) Begründe: "Vermehre um 20%" bedeutet: "Multipliziere mit 1,2"

c) Formuliere selbst eine allgemeine Regel und begründe sie! ("Vermehre um p% ...", "Vermindere um p% ...")

($\longrightarrow$ Argumentieren, Verallgemeinern, Begründen, Darstellen)

Beispiel 3: a) In einem Autobus fahren 17 Erwachsene und 8 Kinder. Der Fahrpreis beträgt für Erwachsene S 80,-, für Kinder S 50,-. Berechne die Gesamteinnahmen!

b) Beschreibe allgemein, wie man die Gesamteinnahmen E ermittelt, wenn a Erwachsene und b Kinder im Autobus fahren und jeweils p bzw. q Schilling bezahlen!

c) Was bedeutet: $a+b$, $a\cdot p$, $a\cdot p+b\cdot q$? Stelle selbst weitere solche Ausdrücke auf, die sinnvoll gedeutet werden können!

d) Was ändert sich, wenn ein Kind genau halb so viel bezahlt wie ein Erwachsener? Was ändert sich, wenn gleich viele Erwachsene wie Kinder im Autobus fahren?

(⟶ Darstellen, Interpretieren, produktives geistiges Arbeiten, kritisches Denken)

Beispiel 4: a) Berechne: 100 - (17+12)

b) Berechne dies auf zwei Arten!

c) Formuliere eine allgemeine Regel!

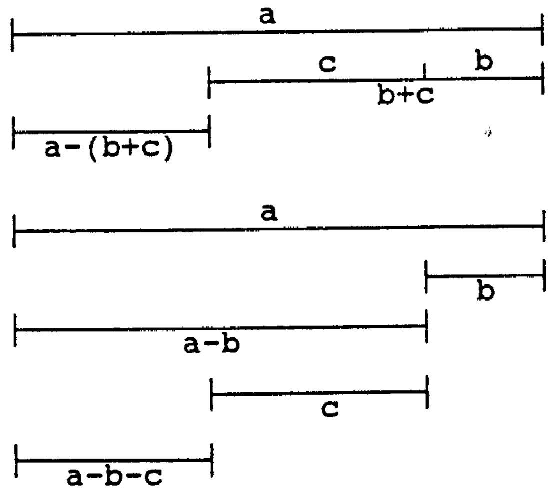
d) Begründe $a-(b+c)=a-b-c$

(1) durch eine alltägliche Situation,

(2) durch Zeichnen und Vergleichen entsprechender Strecken,

(3) durch Zurückführen auf allgemeine Rechengesetze!

Lösung zu (2):



Lösung zu (3):

$$\begin{array}{lll} a-(b+c)=x & & A-B=C \iff A=B+C \\ a = (b+c)+x = & & \\ \quad = b+(c+x) & & A=B+C \iff A-B=C \\ a-b = c+x & & A=B+C \iff A-B=C \\ (a-b)-c = x & & \end{array}$$

Somit: $x = a-(b+c) = (a-b)-c = a-b-c$

Beispiel 5: a) Berechne: $3:\frac{1}{2}$

b) Begründe das Ergebnis dieser Rechnung an einem anschaulichen Beispiel aus dem täglichen Leben!
(Z.B.: Wie viele Halblitergläser können mit 3 Liter gefüllt werden?)

c) Begründe diese Rechnung mit Hilfe von Strecken!

d) Gib eine allgemeine Regel für das Dividieren durch einen Bruch an und begründe sie!

Beispiel 6: a) Kürze: $\frac{x^2+x}{2x}$

b) Gib alle verwendeten Regeln an!

c) Was ist falsch an der "Regel": "Gleiche Zahlen im Zähler und Nenner können weggelassen werden."

Genauso kann man auch in der Oberstufe bei praktisch jeder Aufgabe entsprechende Fragen anschließen, die ein geistiges Durchdringen erzwingen und ein nur kalkülhaftes Abarbeiten verhindern. Aus Platzgründen soll dies nur an einem Beispiel demonstriert werden:

Beispiel 7: a) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{6}\cdot(x+1)^2-6$ und der 1. Achse im Intervall $[0;5]$ eingeschlossen wird!

b) Berechne diesen Flächeninhalt näherungsweise (etwa mittels Zwischensummen)!

c) Erkläre anhand von Aufgabe a) und b), was man unter einem Integral versteht!

d) Formuliere eine Problemstellung mit Geschwindigkeit, Zeit, Weg (etwa Bremsweg), die auf dasselbe Integral führt!

e) Formuliere den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung!

f) Zeige: $\forall\ x\in[a,b]:\ f(x)\geq c \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq c\cdot(b-a)$

(Natürlich können und sollen auch in Aufgabe a) bereits andere Problemstellungen, insbesondere auch außermathematische wie Arbeit, Schwerpunkt, u.ä., gestellt werden. Der Schwierigkeitsgrad sollte aber nicht "mutwillig" durch bloße Verkomplizierung des Integranden und durch die Notwendigkeit der Verwendung besonderer Integrationstechniken gesteigert werden.)

Nicht nur des Lehrplanes und der allgemeinen Ziele wegen, sondern auch aus lernpsychologischen Gründen sind Aufgaben, die permanent auf ein grundlegendes Verständnis abzielen, den reinen Kalkülaufgaben vorzuziehen. Denn verstandene Verfahren sind auch später noch eher rekonstruierbar und daher besser gegen Vergessen geschützt. Dazu ist aber nötig, daß Mathematik auch tatsächlich als verstehbar erlebt werden kann. Dies bedeutet insbesondere, daß *nicht oder schwer durchschaubare Kalküle zu eliminieren und durch leichter verständliche zu ersetzen* sind. Wie angekündigt sollen nun zwei leicht verstehbare Alternativen für die Polynomdivision vorgeschlagen werden. Dabei ist zu bedenken, daß man sich im Rahmen der Schulmathematik auf lineare Divisoren, nämlich auf die Anwendung des folgenden Satzes beschränken kann:

Ist f eine Polynomfunktion vom Grad n und α eine Nullstelle von f, so gibt es eine Polynomfunktion g vom Grad n-1 mit:

$$f(x) = (x-\alpha)\cdot g(x)$$

Beispiel 8: $f(x) = x^3+6x^2+9x+2;\quad f(-2)=0;\quad$ gesucht: $g(x)$

Methode 1: Wir verwenden die auch an vielen anderen Stellen nützliche Regel von HORNER:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(-2) = \\ &(x^3+6x^2+9x+2) - ((-2)^3+6(-2)^2+9(-2)+2) = \\ &[x^3-(-2)^3]+6[x^2-(-2)^2]+9[x-(-2)] = \\ &(x-(-2))\cdot[x^2-2x+4+6(x+2)+9] = (x+2)\cdot(x^2+4x+1) \end{aligned}$$

Methode 2: Wir verwenden die Mehtode des unbestimmten Ansatzes und des Koeffizientenvergleichs:

$$\begin{aligned} x^3+6x^2+9x+2 &= (x+2)\cdot(x^2+ax+b) = \\ &= x^3 + ax^2 + bx + \\ &\quad + 2x^2 + 2ax\ 2b \\ \hline &x^3 + (a+2)x^2 + (b+2a)x + 2b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a+2=6 \Rightarrow a=4,\ 2b=2 \Rightarrow b=1$$
$$\Rightarrow x^3+6x^2+9x+2 = (x+2)\cdot(x^2+4x+1)$$

In ähnlicher Weise sollte man an anderen Stellen des Unterrichts überprüfen, ob die Schüler die verwendeten Algorithmen durchschauen oder nur kochrezeptartig verwenden. Nach meiner Erfahrung wissen etwa die wenigsten Maturanten, warum man bei Extremwertuntersuchungen die zweite Ableitung verwenden kann. Man kann nun die Erklärung des Verfahrens häufig als zusätzliche Aufgabe verlangen oder eine andere Methode verwenden. (Vgl. etwa BÜRGER [1991], Kapitel 2!) Ähnliches gilt auch für Berührbedingungen, Tangentengleichungen, u.s.w.

Abschließende Bemerkungen

Kalküle sind wichtig: sie ermöglichen ein rasches Arbeiten, ohne (inhaltlich) denken zu müssen.

Ein Ziel des Mathematikunterrichts ist ganz gewiß das Einüben von Kalkülen. Aber ebenso gewiß ist, das dies nicht das einzige Ziel des Mathematikunterrichts sein darf - insbesondere im Zeitalter des Computers. Üben darf sich daher nicht auf das Einüben von Kalkülen beschränken, sondern auch andere Fähigkeiten müssen geübt werden. Das nimmt einige Zeit in Anspruch, jedenfalls so viel, daß der Aufgabenvorrat der Schulbücher bei weitem ausreicht. Wenn jemand (Lehrer oder Schüler) glaubt, mit den vorhandenen Aufgaben nicht auszukommen, so sollte er/sie sich ernsthaft die Frage stellen, ob er/sie nicht auf dem besten Weg ist, eine sinnlose Drillmathematik zu prolongieren.

Literatur

BÜRGER, FISCHER, MALLE, KRONFELLNER, MÜHLGASSNER, SCHLÖGLHOFER: Mathematik Oberstufe 2
Lehrbuch für AHS
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1990

BÜRGER, FISCHER, MALLE, KRONFELLNER, MÜHLGASSNER, SCHLÖGLHOFER: Mathematik Oberstufe 3
Lehrbuch für AHS
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1991

KRONFELLNER, PESCHEK: Angewandte Mathematik 1
Lehrbuch für Handelsakademien
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1989

KRONFELLNER, PESCHEK: Angewandte Mathematik 2
Lehrbuch für Handelsakademien
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1990